Study Material for M.A.I st sem Economics

Paper Statistics

Prepared by

Prin.Dr.Pushpa Tayde

सांख्यिकीचे स्वरूप आणि व्याप्ती

दैनंदिन व्यवहारात आपण अनेकदा आकडयांचा उपयोग करतो. कधी जाणीव पुर्वक करतो तर कधी अजाणतेने करतो. आजचे युग हे सांख्यिकीचे युग आहे. शाळा महाविद्यालयात आपण अनेकदा विद्यार्थ्यांचे निकाल ६० टक्के आहे. असे म्हणतो. तेव्हा आपण सांख्यिकीच्या प्रतिशत प्रमाण या साधनाचा उपयोग करीत असतो. आज संशोधनाचे क्षेत्र व्यापक होत आहे. हया क्षेत्रात सांख्यिकीचे महत्व अनन्य साधारण आहे. देशाची लोकसंख्या वाढत आहे. लोकांचे उत्पन्न पर्याप्त नाही. बेरोजगारी वाढत आहे. या सारख्या वाक्यांचा अर्थ लावताना मुळात सांख्यिकीचा विचार करावा लागतो. देशाचे नियोजन करतांना सांख्यिकीय तथ्ये लक्षात घेऊनच योजना तयार करावी लागते. देशाचे राष्ट्रीय उत्पन्न किती व लोक संख्या किती हे माहिती झाल्यास प्रतिव्यक्ती उत्पन्न काढता येते. व त्याच्या आधारे विश्लेषण करता येते. अशा प्रकारे अनेक कारणंसाठी आपल्याला आकडेवारी गोळा करावी लागते त्यालाच आपण समंक असे म्हणतो. संशोधनाशी संबंधीत गोळा केलेल्या आकडेवारीला आपण संमक म्हणतो. संशोधनातील पारस्पारिक संबंध व्यक्त करण्याचे कार्य सांख्यिकी करते. तुलना करतांना किंवा साम्य दाखवितांना आपण काही विशेषणांचा उपयोग करतो. मुलाचे वजन कमी आहे. उंची जास्त आहे. हे गुणात्मक चित्र दाखविते. तर परीक्षेत ८० टक्के गुणात्मक बाबींचे अध्ययन केले जात नाही. जी विशेषणे संख्येमध्ये प्रकट केली जातात त्याचे अध्ययन सांख्यिकी मधे केले जाते. या सर्व बाबी लक्षात घेऊन सांख्यिकीची व्याख्या करता येते.
सांख्यिकीच्या व्याख्या -

सांख्यिकी एखाद्या विषयाला अंकात प्रकट करणाऱ्या समंकाला म्हणतात ज्यामध्ये पारस्पारीक संबंध असतो, जे तुलना करण्यायोग्य आहे व जो एखाद्या विशिष्ट संशोधन किंवा विषयाशी संबंध ठेवतात.
प्रा. एच सेक्रिस्ट यांची व्याख्या - ''विविध कारणामुळे पर्याप्त परिमाणात प्रभावित होणाऱ्या तत्थ्याला समूहाला समंक असे म्हणतात. हे समंक अंकामध्ये दर्शविलेले असतात. त्यांची गणना किंवा पुर्वानुमान हे शुध्दतेच्या योग्य स्तरानुसार केले जाते. विशिष्ट उद्देशाने व्यवस्थितपणे त्यांचे संग्रहण केले जाते. तसेच त्यांची तुलनात्मक मांडणी सुध्दा केली जाते.''

वेबस्टरची व्याख्या - कोणत्याही देशातील लोकांच्या स्थितीबाबत गोळा केलेल्या वर्गीकृत तत्थ्यांना समंक असे म्हणतात. हे वर्गीकरण सारणी किंवा कोणत्याही इतर प्रकारे अंकाची रचना करून अस्तित्वात येते.

या व्याख्येवरून हे स्पष्ट होते की सांख्यिकीद्वारे देशातील लोकांसबंधी माहिती गोळा करता येते.

ऑर्थर बाऊले यांची व्याख्या- सांख्यिकी गणनशास्त्र असून ते माध्याचे शास्त्र आहे समाज व्यवस्थेला परिपूर्ण मानून समाजाच्या विविध अंगाचे एकत्रित मापन करणारे शास्त्र आहे. सांख्यिकी विवरणाला संक्षिप्त व वर्गीकृत करणारी तसेच परस्पर संबंधांना स्पष्ट करणारी पध्दती आहे. कोणत्याही अनुसंधान विषयक तत्थ्यांना पारस्पारिक संख्येत व्यक्त करण्याच्या पध्दतीला सांख्यिकी म्हणतात.

ऑर्थर बाऊले यांचे व्याख्या - ऑर्थर बाऊले यांनी विविध मुद्यांना धरून सांख्यिकीच्या एकुण पाच व्याख्या केलेल्या आहेत.

१. सांख्यिकी हे गणनशास्त्र आहे.
२. सांख्यिकी हे माध्याचे शास्त्र आहे.
३. सांख्यिकी हे समाज व्यवस्थेला परिपूर्ण मानून समाजाच्या विविध अंगाचे एकत्रित मापन करणारे शास्त्र आहे.
४. सांख्यिकी विवरणाला संक्षिप्त व वर्गीकृत करणारी तसेच परस्पर संबंधांना स्पष्ट करणारी पध्दती आहे.
५. कोणत्याही अनुसंधान विषयक तत्थ्यांना पारस्पारिक संख्येत व्यक्त करण्याच्या पध्दतीला सांख्यिकी म्हणतात.

सेलिगमन यांची व्याख्या

एखाद्या अनुसंधान क्षेत्रावर प्रकाश टाकण्यासाठी एकत्रित केलेल्या सांख्यिकिय सामुग्रीचे संग्रहण, वर्गीकरणा मांडणी, तुलना व विश्लेषण या क्रिया करण्याशी संबंधीत शास्त्राला सांख्यिकी असे म्हणतात.

Statistics id the science which deals with the methods of collecting, presenting, comparing, and interpreting mumerical data collected to throw some light on any sphere of enquiry Seligman.

क्रोझन व कोडार यांची व्याख्या- सांख्यिकी म्हणजे संख्याचे संग्रहण, मांडणी, विश्लेषणा व प्रस्तुतीकरणा होय असे म्हणता येईल.

Statistics may be defined as the science of collection, presentation, analysis and interpretation of numerical data – Crozen & Coder

सांख्यिकी स्वरूप आणि व्याप्ती (Nature and Scope of Statistics)

सांख्यिकीचे स्वरूप खूप व्यापक आहे. आज प्रत्येक क्षेत्रात सांख्यिकीचा उपयोग होत आहे. सांख्यिकीला ज्ञान मिळविण्याचे प्रभावी साधन म्हणता येईल. सांख्यिकी ही विज्ञानाची एक शाखा आहे. विज्ञानात प्रयोगामध्ये ज्याप्रमाणे कार्यकारणसंबंध दर्शविला असतो किंवा एखाद्या कारणाचा परिणाम काय हे दर्शविले असते. भौतिकशास्त्र, रसायनशास्त्र यासारख्या शास्त्रामध्ये हीच पध्दती वापरली जाते. अशा प्रकारचे सिध्दांत स्पष्ट करण्यासाठी सांख्यिकीची मोलाची मदत होते. सामाजिक शास्त्रे ज्यामध्ये अर्थशास्त्र, राज्यशास्त्र, समाजशास्त्र यासारख्या शास्त्रांचा समावेश होतो. ही शास्त्रे समाजाशी निगडित असल्यामुळे ह्या शास्त्रांमध्ये प्रयोग केले जात नाही. या शास्त्रात सांख्यिकीच्या आधारावर निष्कर्ष काढले जातात. हे निष्कर्ष मानवाच्या व्यवहाराशी वागणुकीशी संबंधित असल्यामुळे ते परिस्थितीसापेक्ष असतात. ज्या ज्या सामाजिक शास्त्रांच्या संशोधन क्षेत्रात समंक गोळा केले जातात. त्या सर्वच क्षेत्रात सांख्यिकीचा उपयोग केला जातो. यावरून सांख्यिकीची व्याप्ती लक्षात येते. ज्या विविध क्षेत्रात सांख्यिकीचा उपयोग केला जातो. त्याची थोडक्यात माहिती पुढे दिली आहे.

१) सांख्यिकी व गणित-सांख्यिकीला गणिताचा एक भाग म्हटले आहे. गणित आणि सांख्यिकी ह्या दोन्ही विषयात सुत्रांच्या साह्याने आकडे मोड केली जाते.परंतु सांख्यिकीय आकडेमोडीद्वारे काढलेले निष्कर्ष त्रिकाल बाधित सत्य ठरत नाही म्हणून सांख्यिकीची विश्वसनियता गणितापेक्षा कमी आहे.

२) सांख्यिकी व भौतकशास्त्र-भौतिकशास्त्रामध्ये जीवशास्त्र, रसायनशास्त्र, पदार्थविज्ञान या शास्त्रांचा समावेश होता. या शास्त्रात प्रयोगद्वारे नियम स्पष्ट करतांना सांख्यिकीचा उपयोग होतो. तसेच मांडलेल्या नविन सिध्दांताची शुध्दता, वस्तुनिष्ठता तपासण्यासाठी सांख्यिकीचा उपयोग केला जातो .

३)सांख्यिकी व संशोधन-कोणत्याही संशोधनासाठी तत्थ्ये गोळा करावी लागतात. गोळा केलेल्या आकडेवारीचे वर्गीकरण,सारणीकरण विश्लेषण केल्यानंतरच निष्कर्ष काढता येतात.यासाठी सांख्यिकीच्या विविध पध्दतीचा अवलंब करावा लागतो.त्यामुळेच कोणतेही संशोधन सांख्यिकीच्या उपयोगाशिवाय पुर्ण होवू शकत नाही.सांख्यिकीमुळेच संशोधनाला पुर्णत्व येते.सांख्यिकीचे स्वरूप खूप व्यापक आहे. आज प्रत्येक क्षेत्रात सांख्यिकीचा उपयोग होत आहे. सांख्यिकीला ज्ञान मिळविण्याचे प्रभावी साधन म्हणता येईल.

३) सांख्यिकी व सामाजिक शास्त्रे - सामजिक शास्त्रांमध्ये इतिहास, भूगोल, या शास्त्रांचा अंतर्भाव होतो. सामाजिक शास्त्रांच्या अध्ययनात, संशोधनात सांख्यिकीचे महत्व अनन्य साधारण आहे. या सर्व शास्त्रातील कोणत्याही प्रश्नाचे समाधान शोधण्यासाठी, निष्कर्ष काढण्यासाठी संख्याशास्त्र उपयोगाचे आहे. भूगोलामधे, तापमान, पर्जन्यमान, पर्यावरण यासारख्या अनेक बाबींचे अध्ययन संख्याशास्त्राद्वारे केले जाते. जनतेच्या समस्या लक्षात घेऊन त्यावरील उपाय योजना करण्यासाठी अनेक शासकीय संस्था सांख्यिकीचा आधार घेतात. समाजाच्या कल्याणासाठी विविध योजना राबवितांना सांख्यिकीचा अवलंब केला जातो. विविध विषयाशी संबंधित आकडेवारी गोळा केली जाते. समंकाचे वर्गीकरण सारणी करण करून विश्लेषण केले जाते. व निष्कर्ष काढले जातात. म्हणून सामाजिक शास्त्राच्या अध्ययनात संशोधन सांख्यिकीचा उपयोग मोठ्या प्रमाणावर केला जातो.

अर्थशास्त्र व सांख्यिकीचा परस्पर संबंध -

सांख्यिकी आणि अर्थशास्त्र या दोन्ही विषयाचा परस्पराशी अत्यंत निकटचा संबंध आहे. किंबहूना सांख्यिकीच्या उपयोगाशिवाय अर्थशास्त्राचे नियम व संकल्पना स्पष्ट करता येऊ शकत नाही. आर्थिक प्रश्नाच्या राष्ट्रीय उत्पन्न, वस्तूच्या किंमती, उपभोग, बचत, गुंतवणूक, रोजगार, आंतरराष्ट्रीय व्यापार, सार्वजनिक आय, व्यय, माल्थसचा लोकसंख्येचा सिध्दांत,ऐंजेलचा उपभोग व व्ययाचा सिध्दांत,संतोषाधिक्याची संकल्पना अशा विविध संकल्पना समजून घेतांना सांख्यिकीचाच आधार घ्यावा लागतो.आर्थिक नियोजनाचा पायाच सांख्यिकी आहे. भारतात सांख्यिकी तज्ज्ञ डॉ. प्रशांत महालनोबिस यांनी आर्थिक नियोजनसाठी सांख्यिकीद्वारे नविन प्रारूप मांडले. त्याच्याच आधारे नियोजनाचे कार्य चालत

आहे. भारतात दारिद्रय निर्मूलन, आर्थिक विषमता मागासलेपणा हया सारख्या समस्यांवर संशोधन करून उपाय योजना करण्यासाठी सांख्यिकीचीच मदत होते. आजचे अर्थशास्त्र सांख्यिकीच्या अगदी जवळ जात आहे. अर्थशास्त्राच्या अभ्यासात गणितीय पध्दतीचा अधिकाधिक उपयोग केला जात आहे.सांख्यिकी,गणितात्मक अर्थशास्त्र(Econometrics) व गणितीय अर्थशास्त्र(Mathematical Economics) हया सर्व शाखा गणिताशी संबंधित असल्या तरी आधुनिक अर्थशास्त्राच्याच क्षेत्रात येतात. आर्थिक विकासाच्या/सिध्दांतामध्ये गणित्माक पध्दतीचा उपयोग केला जातो. शेवटी सांख्यिकी किवा गणित हे अर्थशास्त्राचा अभ्यासाचा एक भाग बनले आहे.

डॉ.बाऊले यांच्या मते अर्थशास्त्राचा कोणताही विद्यार्थी जोपर्यंत सांख्यिकी पध्दतीचा अभ्यास करणार नाही तोपर्यंत परिपूर्णतेचा दावा करणार नाही. अल्फ्रेड मार्शल यांनी आपल्या पुस्तकात सांख्यिकीचे महत्व सांगितले आहे. अर्थशास्त्र हे संपत्ती, उत्पादन आणि वितरण यांचेशी संबंधित असून ह्या संबंधातील प्रश्न सोडविण्यासाठी व समजण्यासाठी सांख्यिकी उपयोगी पडते. आणि या संदर्भात ती महत्वाची भूमिका बजावते. या विधानावरून अर्थशास्त्र व सांख्यिकी यांचा निकटचा संबंध आहे हे स्पष्ट होते.

या शिवाय सांख्यिकीचा व्यापाराशी संबंध आहे. ग्राहकाच्या आवडी निवडी, त्यानुसार उत्पादन वस्तूचा उत्पादने व्ययं उत्पादनाचे नवे तंत्र वस्तूचा गुणात्मक दर्जा, वस्तूची खरेदी विक्रि या साऱ्या संबंधी हिशोग सांख्यिकीच्या आधारेच ठेवता येऊ शकते. म्हणून अर्थशास्त्र व सांख्यिकीचा जवळचा संबंध आहे हे स्पष्ट होते. या व्यतिरिक्त सांख्यिकीचा विज्ञानाशी, कृषी शास्त्राशी औद्योगिक प्रशासनाशी संबंध आहे.

अशा प्रकारे सांख्यिकीचा संबंध गणित, सामाजिक शास्त्रे, विज्ञान, भौतिकशास्त्र, अर्थशास्त्र, व्यवस्थापनशास्त्र राज्यशास्त्र, अशा विविध क्षेत्राशी येत असल्यामुळे सांख्यिकीचे कार्यक्षेत्र व्यापक झाले आहे.

केंद्रिय प्रवृत्तीचे परिमाणे व त्याचे मोजमाप Central Tendancy & Their Mesures

संशोधनात अनेक प्रकारे समंक गोळा केले जातात. अनेकदा गोळा केलेले समंक अर्थहीन असतात आकाराने मोठे असतात. गोळा केलेल्या समंकाचे वर्गीकरण, सारणीयता केले जाते. त्याचे विश्लेषण करून निष्कर्ष काढले जातात. त्यासाठी वेगवेगळ्या सुत्रांचा वापर केला जातो. व अनेक समंकाचे प्रतिनिधीत्व करणारी संख्या शोधून काढली जाते. त्याला माध्य (Average) असे म्हणतात. ऑर्थर बाऊले ह्यांनी सांख्यिकी शास्त्रात माध्याचे स्थान लक्षात घेऊनच सांख्यिकीची व्याख्या केली आहे ते म्हणतात. ''सांख्यिकी हे माध्याचे शास्त्र आहे.'' त्यांच्या व्याख्येवरून हे स्पष्ट होते की सांख्यिकी शास्त्रात अनेक माध्ये आहेत. ही माध्ये केन्द्रिय प्रवृत्ती दर्शविणारी आहेत. समंकाचे सारणीयन केल्यानंतर विविध प्रकारांनी सुत्रांचा वापर करून ही माध्ये काढली जातात. व संपूर्ण समंकाचे प्रतिनिधीत्व करणारा अंक शोधून काढला जातो. म्हणून त्याला केंद्रिय प्रवृत्तीची परिमाणे किंवा केंद्रिय प्रवृत्तीची माध्ये असे म्हणतात. त्याच्याच आधारे माध्याची व्याख्या केली आहे. पूर्ण समंक क्षेत्रात येणारे व त्या क्षेत्रातील सर्व पदांचे प्रतिनिधीत्व करणारे केंद्रिय प्रवृत्ती दर्शविणारे पद म्हणजे माध्य होय .

माध्याचे प्रकार (Kinds of an average)

सांख्यिकीय माध्याचे प्रमुख पांच प्रकार आहेत.

१. समांतर माध्य किंवा मध्यक Arithmetic Average or Mean
२. मध्यका (Median) किंवा मध्यांक
३. भूयिष्टक (Mode) किंवा बहूलक
४. गुणात्तर माध्य (Geometric Mean) किंवा भूमितीय माध्य
५. हरात्मक माध्य (Harminic Mean)

ही सर्व माध्ये केंद्रिय प्रवृत्ती दर्शवितात. प्रत्येक प्रकारच्या माध्याचे गुण दोष व काढण्याची पध्दती पुढे दिली आहे.

१. समांतर माध्य किंवा मध्यक - (Arithmetic Average or Mean) समांतर माध्यालाच सरासरी, गणितीय माध्य किंवा मध्यक असेही म्हणतात. समांतर माध्य काढणे अतिशय सोपे व समजण्यासाठी सुलभ आहे. त्यामुळेच अनेक ठिकाणी समांतर माध्याचा वापर केला जातो. उदा. देशातील सरासरी आयुर्मान, दरडोई उत्पन्न इ. समांतर माध्य काढतांना पदमालेतील सर्व पदमुल्यांचा विचार केला जातो. पदमालेतील पदमुल्यांचा प्रभाव समांतर माध्यमावर पडतो. समांतर माध्य हे पदमालेतील पद असतेच असे नाही. पदमालेतील प्रत्येक पदाच्या आकाराच्या प्रभाव समांतर माध्यावर पडत असल्यामुळे समांतर माध्य विश्वसनीय परिमाण आहे असे म्हटले जाते.

समांतर माध्याची वैशिष्टये-

१. समांतर माध्य काढतांना पदमालेतीन सर्व पदमुल्यांचा विचार करण्यात येतो.
२. समांतर माध्यात प्रत्येक पदाला त्याच्या आकारमान नुसार महत्व देण्यात येते.
३. समांतर माध्य हे सर्व पदांचे सारखे प्रतिनिधीत्व करते.
४. समांतर माध्य हे त्या पदमालेतील अंक असेलच असे नाही. तरी देखील ते पदमालेचे प्रतिनिधीत्व करते.

समांतर माध्याचे गुण -

१. समांतर माध्याचे गणन करणे सोपे आहे.
२. समांतर माध्य समजण्यास सुलभ आहे.
३. समांतर माध्याची गणना करतांना पदमालेतील पदांना चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने लावण्याची गरज नसते.
४. समांतर माध्य काढतांना पदमालेतील प्रत्येक पदमुल्याचा प्रभाव त्यावर पडतो.
५. पदमालेतील पदमुल्यांना चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने लावल्या नंतर सुध्दा समांतर माध्य तेवढेच निघते. त्यात बदल होत नाही.

६. समांतर माध्य काढण्यासाठी निश्चित सुत्राचा वापर केला जात असल्यामुळे कोणीही माध्य काढले तरी उत्तर सारखेच येते.
७. समांतर माध्य हे खऱ्या अर्थाने पदमालेचे प्रतिनिधीत्व करणारे असते.
८. पदसंख्या जास्त असेल तर समांतर माध्य अधिक योग्य निघते कारण अशा वेळी सर्वात जास्त किंवा कमी पदमुल्य असलेल्या संख्येचा प्रभाव कमी पडतो.
९. पदमालेतील काही पदमुल्ये माहिती नसतांना देखील हे माध्य काढता येते.
१०. समांतर माध्य काढण्याचे सुत्र सोपे असल्यामुळे गणन करणे सोपे जाते.
११. एखादे कल्पित माध्य होऊन लघु पध्दतीने समांतर माध्य काढता येऊ शकते.

समांतर माध्यमाचे दोष किंवा मर्यादा

१. पदमालेतील पदसंख्या कमी असेल तर समांतर माध्य बरोबर निघत नाही. अशावेळी सर्वात जास्त किंवा कमी पदमुल्य असलेल्या संख्येचा प्रभाव समांतर माध्यावर पडतो व माध्य दोषपूर्ण निघते.
२. पदमालेतील एखादे पद फारच मोठ्या संख्येचे असेल व इतर पदे लहान असेल तर समांतर माध्य मोठ्या पदाकडे झुकते.
३. पदमालेत मोठ्या प्रमाणात उच्चावचने असतील तर समांतर माध्य प्रातिनिधीक मानता येत नाही.
४. समांतर माध्य काढण्यासाठी गणितीय पध्दतीचा अवलंब करावा लागतो. नुसत्या अवलोकनाने समांतर माध्य काढता येत नाही.
५. समांतर माध्य पूर्णाक संख्या येत नसेल तर काही वेळा निष्कर्ष अडचणीत होतात. उदा दोन वर्गात क्रमाने ४७ व ५० विद्यार्थी आहेत. वर्गातील सरासरी विद्यार्थी संख्या ४७+५०/२ = ९७/२ = ४८.५ विद्यार्थी येतात. ही विद्यार्थी संख्या मोजणे शक्य नाही.
६. गुणात्मक अध्ययन करण्यासाठी समांतर माध्य उपयुक्त नसते.
७. जेव्हा दिलेली पदमाला ही प्रारंभ शेवट (Open-End) नसलेली असते. तेव्हा माध्य काढतांना एखादी संख्या गृहीत धरून माध्य काढावा लागतो. तर मध्यका किंवा भूविषयक काढतांना असे काही गृहीत न धरताही काढता येते.
८. पदमालेचे सामान्य वितरणा असेल तर समांतर माध्य उपयोगी पडते. (Normal Distribution) जर वितरण U आकारचे असेल तर समांतर माध्याचा उपयोग होत नाही.
९. समांतर माध्य हे त्या पदमालेतील संख्या नसेल तर त्याला प्रातिनिधीक मानता येऊ शकत नाही.
१०. माध्याबरोबर जर पदमाला दिली नसेल तर चुकीचे निष्कर्ष निघतात.
११. फार मोठ्या प्रमाणात समंक गोळा केले असतील तर समांतर माध्य काढता येत नाही.

२. मध्यका (Median) किंवा मध्यांक

कोणत्याही पदमालेमध्ये दिलेल्या पदांना चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने लिहील्यानंतर त्यातील बरोबर मधले पद शोधून काढले. जाते तेव्हा त्या पदाला 'मध्यका' असे म्हणतात.

व्याख्येवरून मध्यकाची खालील वैशिष्टये सांगता येतात.

१. मध्यका हे पदमालेचे मधले पद असते.
२. मध्यकाच्या वरचा पदे मध्यकापेक्षा लहान तर खालील पदे चढत्या क्रमाने म्हणजे आरोही(Ascending) केलेली असावी. मात्र पदमालेची जागा रचना उतरत्या क्रमाने म्हणजे अवरोही (Decending) असेल तर मात्र मध्यकेच्या वरची सर्व पदे मोठी व खालची सर्व पदे लहान असतात.
३. मध्यका हे पदमालेतीलच एक पद असते.
४. पदमालेच्या अगदी मधे असणाऱ्या पदमुल्याला मध्यका म्हणतात.

मध्यकाचे गुण -

१. मध्यका अगदी निरीक्षणाद्वारे सुध्दा काढता येते. त्यामुळे मध्यका काढणे फारच सोपे असते.
२. सर्वात खालच्या व सर्वात वरच्या पदमुल्यांचा मध्यकेवर परिणाम होत नाही.
३. मध्यका अचूक आणि निश्चित काढता येते.
४. पदांची संख्या कळल्यास पदमालेतील पहिले व अंतिम काही पदे माहिती नसेल तरी सुध्दा मध्यका काढता येते.
५. मध्यका पदमालेतीलच पद असल्यामुळे ते पदमोलेचे प्रतिनिधीत्व करणारे असते.
६. मध्यका आलेखाद्वारे देखील दर्शविता येते.

७. पदमालेच्या गुणात्मक अध्ययनासाठी मध्यका हे माध्यम अत्यंत उपयोगाचे आहे.
८. सतत पदमालेत वर्गांतर असमान असली तरी मध्यकाचे गणन करता येते.
९. पदमालेतील काही चलांच्या किंमती माहिती नसतील परंतु त्यांना मध्यका हेच केंद्रिय प्रवृत्तीचे परिमाण वापरणे योग्य असते.

मध्यकाचे दोष-

१. पदमालेची क्रमवार रचना करता येत नसेल तर मध्यका काढता येत नाही.
२. मध्यका काढण्यासाठी पदमालेची चढत्या क्रमाने किंवा उतरत्या क्रमाने अशी विशेष रचना करून घ्यावी लागते. त्याशिवाय मध्यका काढता येत नाही. समांतर माध्य काढताना अशी रचना करावी लागत नाही.
३. मध्यका हे माध्यम समांतर माध्याच्या तुलनेत अनिश्चित आहे पदमालेची रचना बदलण्यास मध्यका बदलू शकते.
४. मध्यका काढतांना पदमालेतील विशिष्ट अंकांनाच महत्व दिले जाते. इतर अंकाना इतके महत्व नसते.
५. पदमुल्यांची संख्या कमी असेल तर मध्यका हे विश्वसनीय परिमाण नाही.
६. सतत पदमालेत मध्यका काढतांना विशिष्ट बाबी गृहित धराव्या लागतात. त्यात बदल झाल्यास अचूक मध्यका काढता येत नाही.
७. पदमालेतील पदांमध्ये जास्त अंतर असेल तर मध्यकाची योग्य अशी गणना करता येत नाही.
८. साध्या गणितीय पध्दतीने मध्यका काढता येत नाही.

भूयिष्टक किंवा बहूलक (Mode) -

कोणत्याही पदामध्ये वारंवार येणारे पद म्हणजे भूयिष्टक होय. पदमालेत पुन्हा पुन्हा येणाऱ्या पदांच्या मुल्याला भूयिष्टक असे म्हणतात.

वैयक्तिक पदमालेत वारंवार येणारे पद खंडीत पदमालेत महत्तम असणाऱ्या पद संख्येशी संबंधित पद मूल्य आणि सतत पदमालेत ज्याची वारंवारिता सर्वात जास्त आहे असा गट भूयिष्टक दर्शवितो.

भूयिष्टक वैशिष्टये-

१. भूयिष्टक पदमालेतील एक पद असते.
२. पदमालेला आलेखावर रेखाटल्यास भूयिष्टक काढता येतो. आलेखामध्ये वक्राची उंची जिथे सर्वात जास्त असते तेच पद भूयिष्टक असते.
३. भूयिष्टक हे पद पदमालेत वारंवार येणारे पद असते.

भूयिष्टक गूण-

१. पदमालेचे निरीक्षण करून भूयिष्टक काढता येते.
२. समांतर माध्यावर ज्याप्रमाणे अति टोकाच्या पदाचा परिणाम होतो तसा परिणाम भूयिष्टकाची गणना करतांना होत नाही.
३. भूयिकष्टक हे पदमालेतीलच एक पद असल्यामुळे ते पदमालेचे प्रतिनिधीत्व करते.
४. पदमालेतील सर्व पदांचे मूल्य माहिती नसेल तरी भूयिष्टक काढता येते.
५. खंडित किंवा अखंडित पदमालेत वारंवारीतेचे विचरणा विषम पध्दतीने झाले असेल तर भूयिष्टक हे अत्यंत उपयुक्त परिमाण ठरते.
६. एखाद्या पदमालेत काही पदे काढली व काही पदे नव्याने समाविष्ट केली तरी देखील भूयिष्टक काढता येते.
यावरून भूयिष्टक हे लवचिक माध्य उबसून सोयिस्कर आहे.

भूयिष्टकाचे दोष-

भूयिष्टकाचे पुढील दोष आहेत.

१. एकाच पदमालेत कधी कधी दोन किंवा तीन भूयिष्टक निघू शकतात.
२. भूयिष्टकामध्ये पदमालेच्या इतर पदांचा विचार केला जात नाही केवळ वारंवारिता जास्त असलेल्या पदाचाच विचार केला जातो त्यामुळे भूयिष्टक हे पदमालेचे पूर्ण प्रतिनिधीत्व करीत नाही.
३. इतर गणितीय गणना करण्यासाठी भूयिष्टक उपयोगी नाही.
४. पदमालेतील टोकाची पदे सर्वात लहान व सर्वात मोठे पद ह्यांना महत्व दयायचे असेल तर भूयिष्टक उपयुक्त नाही.

५. भूयिष्टक हे समांतर माध्य किंवा मध्यकाप्रमाणे निश्चित नसते त्यामुळे भूयिष्टकाची निश्चित अशी व्याख्या करता येत नाही.
६. भूयिष्टक काढतांना वेगवेगळ्या पध्दतीचा उपयोग केला तर वेगवेगळे उत्तर येते. म्हणून हे परिमाण काटेकोर नाही.

गुणोत्तर माध्य किंवा भूमितीय माध्य - (Geometric Mean)

पदमालेत जेव्हा लहान आकाराच्या पदांना अधिक महत्व दयायचे असते व मोठ्या आकाराच्या पदांना कमी महत्व दयायचे असते तेव्हा गुणोत्तर माध्य काढले जाते.

गुणात्तर माध्याची व्याख्या - कोणत्याही पदमालेतील एकुण परदमुल्यांचा गुणाकार करून त्यांचे पदसंख्येनुसार एकूण पदमुल्यांचा गुणाकार करून त्यांचे पदसंख्येनुसार मूळ काढल्यानंतर येणारे उत्तर हे गुणोत्तर माध्य असते.

गुणोत्तर माध्याची वैशिष्टये-

१. गुणात्तर माध्य हे लहान पदांना अधिक व मोठया पदांना जास्त महत्व देणारे असते.
२. गुणोत्तर माध्याचे मूल्य समांतर माध्याच्या मुल्यापेक्षा नेहमी कमी असते.
३. पदमालेत शुन्य ऋण संख्या असल्यास गुणोत्तर माध्य काढता येत नाही.

गुणोत्तर माध्याचे गुण -

१. गुणोत्तर माध्यामध्ये सर्वच पदांचा समाविष्ट करून गणना केली जात असल्यामुळे हे माध्य पदमालेचे केंद्रीय प्रवृत्तीचे मापन करणारे योग्य परिणाम ठरते.
२. गुणोत्तर माध्य काढतांना मोठ्या पदांना कमी महत्व व लहान पदांना जास्त महत्व देत असल्यामुळे मोठ्या पदाचा माध्यावर होणारा विपरित परिणाम टाळता येतो.
३. अधिक विषमता असलेल्या पदमालेकरीता गुणोत्तर माध्य हे अधिक उपयुक्त आहे.
४. प्रतिशत प्रमाण, दर, अनुपात, अंकगणितीय व बीज गणितीय गणना करिता तसेच निर्देशांक विश्लेषणा करिता गुणोत्तर माध्य हे अधिक योग्य आहे.
५. कोणत्याही गृहिताच्या आधारे गुणोत्तर माध्य स्पष्ट केले जात नाही.
६. हे माध्य काढण्यासाठी सुत्राचा अवलंब केला जातो. त्यामुळे माध्याची संकल्पना स्पष्ट आहे.
७. गुणोत्तर माध्य काढतांना पदमालेची फेर रचना करवी लागत नाही.
८. पदांची संख्या व त्यांचा गुणाकार केल्यानंतर येणारी संख्या माहिती असेल तर प्रत्येक पदाचे मूल्य माहिती नसतांना देखील गुणोत्तर काढता येते.

गुणोत्तर माध्याचे दोष-

गुणात्तर माध्याचे दोष खालील दोष आहेत.

१. पदमोलत एखादे पद शुन्य किंवा ऋण संख्या असेल तर गुणोत्तर माध्य काढता येत नाही.
२. नुसत्या निरीक्षताद्वारे गुणोत्तर माध्य काढता येत नाही.
३. गुणोत्तर माध्याची गणना करतांना किचकर अशा गणितीय सूत्राचा अवलंब करावा लागतो.
४. गुणोत्तर माध्य हे पदमालेतील पद नसते. त्यामुळे ते पदमालेचे प्रतिनिधीत्व करू शकत नाही.
५. मोठ्या पदांचे महत्व कमी व लहान पदाचे महत्व जास्त असते. मोठ्या पदांना अधिक महत्व दयायचे असल्यास गुणोत्तर माध्य उपयुक्त ठरत नाही.
६. हे माध्य काढतांना चा उपयोग करावा लागतो. त्यामुळे सामान्य व्यक्तीकरिता ते क्लिष्ट व किचकट आहे.

हरात्मक माध्य - Harmonic Mean

ज्यावेळी पदमालेतील मोठ्या पदाचे महत्व कमी करून लहान पदाचे महत्व वाढवायचे असते. तेव्हा हरात्मक माध्याचा उपयोग करतात. या माध्याचा उपयोग विशीष्ट हेतूनेच केला जातो.

हरात्मक माध्याची व्याख्या - ''पदमालेतील एकूण पदसंख्येला पदमुल्याचे व्यत्क्रम काढून त्याच्या बेरजेने भाग दिल्यास जी संख्या प्राप्त होते तिला हरात्मक माध्य असे म्हणतात.''

१ ह्या संख्येला पदाचे मुल्याने भाग देऊन येणारी संख्या म्हणजेच व्यत्क्रम होय. पदमालेतील संख्या कमी असतील तर प्रत्यक्ष भागाकार करून व्यत्क्रम सांखीचा उपयोग करून हरात्मक माध्य काढणे सोयीचे होते.

हरात्मक माध्याचे गुण -

१. हरात्मक माध्यात पदमालेतील प्रत्येक पदाला विचारात घेतले जात असल्यामुळे ते केन्द्रीय प्रवृत्तीचे योग्य प्रकारे मापन करते.
२. हरात्मक माध्य काढतांना आति लहान व अती मोठ्या पदाचा प्रभाव कमी पडतो.
३. बीज गणितीय गणना करण्यासाठी हरात्मक माध्य अत्यंत उपयुक्त आहे.
४. पदमालेतील पदांमध्ये जर अधिक विषमता असेल तर हरात्मक माध्य हे अधिक उपयोगाचे आहे.
५. हरात्मक माध्याचा उपयोग वेग, प्रवेग तसेच संख्याशो व गणितामध्ये केला जातो.

हरात्मक माध्याचे दोष -

१. हरात्मक माध्य काढण्यासाठी किचकट गणितीय पध्दतीचा अवलंब करावा लागतो.
२. पदमालेतील एखादे पद माहिती नसेल तर हरात्मक माध्य काढता येत नाही.
३. हरात्मक माध्य क्लिष्ट असून सामान्य नागरिकांसाठी ते काढणे अत्यंत कठीण आहे.
४. पदमालेतील एखादा अंक ऋण संख्या असेल तर हरात्मक माध्य काढता येत नाही.
५. हरात्मक माध्य हे पदमालेच्या बाहेरील पद असू शकते त्यामुळे ते पदमालेचे प्रतिनिधीत्व करू शकत नाही.

माध्य काढण्याच्या पध्दती -

संशोधनामध्ये गोळा केलेल्या समंकाची रचना करून तीन प्रकारचा पदमाला निर्माण करता येतात.

१. वैयक्तिक पदमाला Individual Series
२. खंडीत पदमाला Dicreate Series
३. सतत पदमाला Continuous Series

१. वैयक्तिक पदमाला - प्राप्त अंक त्याच स्वरूपात मांडले असता जी पदमाला तयार होते त्याला वैयक्तिक पदमाला म्हणतात. उदा. पाच विद्यार्थ्यांना मिळालेले गुण
   ८५,३५,४०,६५,६३
२. खंडित पदमाला - ज्यावेळी पदासोबत ते पद किती वेळा आलेले आहे ती संख्या लिहिलेली असते तेव्हा त्या पदमालेत खंडीत पदमाला असे म्हणतात.

उदा.	गुण	विद्यार्थी
	८५	२
	६३	५
	३५	३

   यावरून हे लक्षात येते की ८५ गुण मिळविणारे २ विद्यार्थी आहेत. ६३ गुण मिळविणारे ५ विद्यार्थी आहेत व ३५ गुण मिळविणारे ३ विद्यार्थी आहेत.
३. सतत पदमाला - ज्यावेळी विशिष्ट गटात विभागती केली जाते गणाची न्यनतम व उच्चतम मर्यादा दिलेली असते व त्या गटामध्ये येणाऱ्या पदाची पूनरावृत्ती कीती वेळा झालेली आहेत हे दर्शविले असते. तेव्हा त्या पदमालेला सतत उच्चतम मर्यादा ही दुसऱ्या गटाची न्युनतम मर्यादा असते.

उदा.	वयोगट
	१०-२० - ३
	२०-५० - ५
	३०-४० - ८
	४०-५० - ४

१. वैयक्तिक पदमालेत समांतर माध्य काढणे.
   वैयक्तिक पदमालेत समांतर माध्य काढण्यासाठी दोन पध्दतीचा अवलंब करतात.
   अ. प्रत्यक्ष पध्दती

   ब. लघु पध्दती

अ. प्रत्यक्ष पध्दती -

१. प्रत्यक्ष पध्दतीद्वारे समांतर माध्य काढण्यासाठी दिलेली पदमाला लिहून घ्या.

२. पदमोलतील पदांची संख्या मोजून घ्या. त्यालाच n म्हणतात. n म्हणजे Number of items पदसंख्या होय.

३. दिलल्या पदांच्या मुल्यांची बेरीज करा यालाच सिग्मा एम. म्हणतात.

४. समांतर माध्य काढण्यासाठी खालील सुत्राचा अवलंब करा.

$a=\Sigma m/n$

a=average, Mean, Arithmetic Mean.

Σm=total of measurement i.e. x1+x2+x3…..xn.

n=Total number of items

उदा. एका वर्गात १० मुलांना अर्थशास्त्रात मिळालेले गुण पुढील प्रमाणे आहेत. त्या आधारे समांतर माध्या काढा.

गुण - ७०,७५,३५,६५,६०,७१,८१,६५,४१,३७

$n=10$ $\Sigma m=600$

$a=\Sigma m/n = 600/10 = 60$

समांतर माध्य = ६०

ब. अप्रत्यक्ष किंवा लघु पध्दतीने समांतर माध्य काढणे.

१. दिलेली पदमाला लिहून घ्यावी.

२. दिलेल्या पदमालेतील कोणत्याही एखादे पद किंवा गणन करणे सोयीचे होईल अशी एखादी संख्या कल्पीत माध्य किंवा गृहित माध्य (Assumed Mean) म्हणून निवडा त्याला x संबोधले तरी चालते.

३. सर्व पदमुल्यांचे गृहित माध्यापासूनचे अंतर (deviation) d शोधून काढा. त्यासाठी (m-x) या सुत्राचा उपयोग करा. त्याला dx हे नाव दया. dx चे मुल्य धन किंवा ऋण जे येईल ते तसेच लिहा.

४. dx ची बीजगणितीय पध्दतीने बेरीज करा. त्यामध्ये चिन्ह लक्षात घेऊन बेरीज करा.

५. येणाऱ्या बेरजेला Σ dx म्हणजे गृहित माध्यापासूनच्या अंतराची बेरीज हे नाव द्या.

६. यानंतर खालील सुत्रात किंमती टाका.

$a=x+\Sigma dx/n$

यामध्ये a म्हणजे समांतर माध्य

x म्हणजे कल्पित किंवा गृहित माध्य.

d म्हणजे कल्पित माध्यापासूनचे अंतर

Σdx = कल्पित अमाध्यापासूनच्या अंतराची बेरीज

n = पदसंख्या

सुत्रात किंमती टाकून गणना केल्यास समांतर माध्य मिळते.

उदा. १० विद्यार्थ्यांना घटक चाचणीत मिळालेले गुण दिलेले आहेत त्या आधारे समांतर माध्य काढा.

५०,५५,५२,४८,६४,७५,३५,४३,४०,४४

Sr. No.	Obtained Marks	Deviation from Assumed Mean. dx
		x = 50 (m.x)
1	50	+ 5
2	55	+2
3	52	-2
4	48	+25
5	64	-15
6	75	+25
7	35	-15
8	43	-7

9	40	-10
10	44	-6
N = 10		Σdx = -40+46=+6

Applying the following formula

a=x+Σdx/n

= 50 + 6/10 = 50+.6 = 50.6

गृहीत माध्याची राशी दिलेल्या पदमालेतीलच असावी असे नाही. गणनाच्या सोयीकरीता कोणतीही संख्या गृहीत माध्य म्हणून घेता येते.

खंडीत पदमाला -

खंडीत पदमालेत समांतर माध्य शोधून काढणे.

प्रत्यक्ष पध्दती - खंडीत पदमालेत समांतर माध्य काढण्यासाठी खालील पध्दतीचा अवलंब करावा.

१. दिलेल्या पदमालेचे पदमुल्य (Measurment) (m) चढत्या क्रमाने लिहून घ्या.
२. प्रत्येक पदमुल्यासमोर (m) समोर त्याची वारंवारिता (Frequency) लिहून घ्या. त्याला f असे नाव द्या.
३. तिसऱ्या रकान्यामध्ये पदमुल्य (m) व त्याची वारंवारिता ह्यांचा गुणाकार करून mxf येणारे मूल्य लिहा.
४. रकान्यातील सर्व mxf च्या मुल्यांची बेरीज करा त्याला Σmf. म्हणा.
५. वारंवारीतेची बेरीज करा तिला n पदसंख्या म्हणा.
६. यांनतर खालील सुत्राचा अवलंब करून समांतर माध्य काढा.
   a=Σmf/n

जेथे a= समांतर माध्य Arithmetic Average
Σ= बेरीज Summation
mf= मुल्य आणि वारंरितेचा गुणाकार
EΣmf=सर्व मुल्य आणि वारंवारितेच्या गुणाकाराची बेरीज Total mf
n=पदसंख्या No. of Items.

खालील तक्त्यात विद्यार्थ्यांना मिळालेले गुण दर्शविलेले आहेत त्या आधारे समांतर माध्य काढा .

Marks M.	No. Of Students (f)	M*f.
10	3	30
11	4	44
12	7	84
13	15	195
14	20	280
15	11	165
16	9	144
18	6	108
20	5	100
	n = 80	Σmf 1150

खालील सुत्रात किंमती टाकल्यास

$$a= \left(\frac{\Sigma mf}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{1150}{80}\right)$$

= 14.375

अप्रत्यक्ष पध्दती किंवा लघु पध्दती (Shortcut Method)

लघुत्तरी पध्दतीने समांतर माध्य काढण्यासाठी खालील पध्दतीचा अवलंब करावा.

१. दिलेली पदमाला चढत्या उतरत्या क्रमाने लिहून घ्यावी
२. दिलेल्या पदमुल्यापैकी गणन करण्याकरिता सोयीचे होत असलेले पद गृहीत माध्य म्हणून घ्या. त्याला x Assumed Mean संबोधा.
३. गृहीत माध्याचे सर्व पदमुल्यांपासूनचे अंतर (deviatation) (d) काढा. त्यासाठी (m-x) सुत्राचा अवलंब करा. त्याला dx हे नाव द्या.
४. पुढच्या रकान्यामध्ये वारंवारिता लिहा. तिला f (Frequency) म्हणा.
५. वारंवारिता आणि गृहीत माध्यापासूनचे विचलन dx यांचा गुणाकार करा त्याला fdx हे नाव द्या.
६. सर्व fdx मुल्यांची बेरीज करा त्याला Σfdx असे नाव द्या.
७. सर्व वारंवारितेची बेरीज करा त्याला n हे नांव द्या.
८. यानंतर समांतर माध्य काढण्यासाठी खालील सुत्राचा अवलंब करा.

a = $(\frac{x+\Sigma fdx}{n})$

जेथे a = समांतर माध्य

x = गृहीत माध्य

fdx = वारंवारिता व विचलनाचा गुणाकार

Σfdx = सर्व वारंवारिता व विचलनाच्या गुणाकारानंतर मिळालेल्या मुल्यांची बेरीज

n= पदसंख्या

उदा. लहान मुलांच्या कपडयाची साईज व विकत घेणाऱ्या ग्राहकांची संख्या दिलेली आहे त्या आधारे समांतर माध्य काढा.

Size	6	7	8	9	10	11	12	13
No of Consumer	6	7	9	11	13	6	5	3

Size	dx from (x=10)	f.	Fdx
6	-4	6	-24
7	-3	7	-21
8	-2	9	-18
9	-1	11	-11
10	0	13	0
11	+1	6	+6
12	+2	5	10
13	+3	3	+9
		n = 60	Σfdx = -49

खालील सुत्रात किंमती टाकल्यास

a = $(\frac{x+\Sigma fdx}{n})$

a = $(\frac{10+-49}{60})$

a = 10 + (-0.82)

a = a.18

अखंडीत पदमालेत समांतर माध्य

प्रत्यक्ष माध्य (Direct Method)

अखंडीत पदमालेत प्रत्यक्ष पध्दतीने समांतर माध्य शोधून काढण्यासाठी खालील पध्दतीचा अवलंब केला जातो.

१. दिलेल्या पदमालेत जे गट दिलेले असतात त्यांना आपण मूल्य म्हणतो. हे गट चढत्या क्रमाने लिहून घ्यावे.
२. प्रत्येक गटाचे मध्यमुल्य काढा त्यासाठी खालील सुत्राचा उपयोग करा.

M.V = $(\frac{Lower\ Value\ L1+Upper\ Value\ (L2)}{2})$

३. नंतरच्या रकान्यात प्रत्येक गटासमोर त्याचे मध्य मूल्य लिहा
४. ह्या माध्य मुल्यासमोर त्याची वारंवारिता लिहा.
५. त्याच्या पुढच्या रकान्यात मध्यमुल्य (MV) व वारंवारिता (f) यांचा गुणाकार करा. त्याला नाव द्या.
६. सर्व ची बेरीज करा.
७. सर्व वारंवारितेची बेरीज करा त्याला n नाव द्या.
८. समांतर माध्य शोधून काढण्यासाठी खालील सुत्राचा अवलंब करा.

a = $(\frac{\Sigma mf}{n})$

साधारण पणे अखंडित पदमालेत समांतर माध्य काढण्यासाठी प्रत्यक्ष पध्दतीचा अवलंब केला जात नाही कारण गणना करणे थोडे किचकट होते.

उदा. एका वर्गातील विद्यार्थ्यांना मिळालेले गुण व विद्यार्थी संख्या पुढे दिलेली आहे त्या आधारे समांतर माध्य काढा.

Marks	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
No. of Students	7	18	36	28	11

Marks	M.V. L1+L2/2	No. of Students (f)	Mxf
0-10	5	7	35
10-20	15	18	270
20-30	25	36	900
30-40	35	28	980
40-50	45	11	495
		n= 100	Σmf=2680

खालील सुत्रात किंमती टाकल्यास

a = $(\frac{\Sigma mf}{n})$

= $(\frac{2680}{100})$

= 26.8

लघुत्तरी पध्दती (Short cut Method)

लघुत्तरी पध्दतीने समांतर माध्य काढण्यासाठी खालील पध्दतीखा अवलंब करावा.

१. दिलेले गट चढत्या क्रमाने लिहून घ्या.

प्रत्येक गटाचे मध्य मुल्य MV काढा. त्यासाठी $\frac{L1+L2}{2}$ या सुत्राचा अवलंब करा. त्याला M म्हणा.

२. MV मधून एखादे पद गृहीत माध्या Assumed Mean (x) म्हणून निवडा
३. गृहीत माध्याचे x चे सर्व MV पासूनचे अंतर विचलन (deviation) d शोधून काढा. (m-x) या सुत्राचा अवलंब करून काढा व त्याला dx म्हणा

४. dx मधून एखादी सामान्य संख्या निघत असेल तर ह्या सामान्य संख्येने dx ला भाग दया. येणाऱ्या संख्या जवळच्या दुसऱ्या रकान्यात लिहा. व त्याला dx असे नाव द्या. पुढील गणना करण्यासाठी ऐवजी dx चा उपयोग करा.
५. त्या पुढील रकान्यात वारंवारीता लिहा frequency त्याला f म्हणा.
६. f व dx चा गुणाकार करा त्याला fdx नाव द्या
७. सर्व fdx मुल्यांची बेरीज करा त्यालाΣfdx संबोधा
८. सर्व वारंवारितेची बेरीज करा त्याला n नाव द्या. समांतर माध्य काढण्यासाठी खालील सुत्राचा अवलंब करा.

a= $(\frac{x+\Sigma f dx}{n*i})$

यामध्ये म्हणजे वर्गांतर किंवा सामान्या घटक होय.

उदा. खालील पदमालेचे समांतर माध्य काढा.

गट	०-१०	१०-२०	२०-३०	३०-४०	४०-५०	५०-६०	६०-७०
वारंवारिता	७	१२	१९	२६	२०	११	५

गट	M.V.	dx(m-x)x=35	dx, i=10	frequency	Fdx
0-10	5	-30	-3	7	-21
10-20	15	-20	-2	12	-24
20-30	25	-10	-1	19	-19
30-40	35	0	0	26	0
40-50	45	+10	+1	20	+20
50-60	55	+20	+2	11	+22
60-70	65	30	+3	5	+15
				n=100	Σdfx = -7

सुत्रात किंमती टाकल्यास

a = $(\frac{x+\Sigma f dx}{n*i})$

a= $(\frac{35+-7}{100*10})$

a= $(\frac{35+-70}{100})$

a=35 - .70

समांतर माध्य - 34.3

मध्यका (Median)

मध्यकासाठी M किंवा m ह्या चिन्हाचा वापर करतात. वैयक्तिक पदमालेत मध्यका काढणे.

वैयक्तिक पदमालेत मध्यका काढण्यासाठी खालील पध्दतीचा अवलंब करतात.

१. दिलेली पदमाला Series चढत्या क्रमाने लिहून घ्या. (ascending order)
२. दिलेल्या पदमालेतील पदसंख्या मोजून घ्या. त्याला n नाव द्या.
३. खालील सुत्राचा अवलंब करा.

m=The size of (n+1/2) $(\frac{n+1}{2})$th Item.

४. सुत्रामध्ये किंमती टाकून आलेले मुल्य म्हणजे मध्यका Median होय.

उदा. Calculate the Median from the following Series.

8,9,24,27,18,6,15,11,7,21

उत्तर - Calculation of Mean सुत्रात किंमती टाकल्यास

Size arranged in ascending order

6	m=The size of (n+1/2) $(\frac{n+1}{2})$th Item
7	= The size of (10+1/2) $(\frac{10+1}{2})$th item
8	= The size of 5.5th item.
9	= $(\frac{5th\ item+6th\ item}{2})$
11	= $(\frac{11+15}{2})$
15	= $(\frac{26}{2})$
18	= 13.
21	The Median is 13.
24	
27	
n=10	

खंडीत पदमालेत मध्यका काढणे- (Discrete Series)

खंडीत पदमालेत मध्यका काढण्याकरीता खालील पध्दतीचा अवलंब करावा.

१. दिलेली पदमाला चढत्या क्रमाने लिहून घ्या.
२. प्रत्येक पदसंख्येसमोर त्याची वारंवारिता लिहून घ्या. (frequency) (f)
३. वारंवारितेच्या मदतीने संचयी वारंवारिता काढा. संचयी वारंवारिता काढतांना मागील पदाच्या वारंवारितेची बेरीज करा. त्या पदाची संचयी वारंवारिता बेरीज करत गेल्यास एकुण संचयी वारंवारिता मिळते. त्याला Cumulative Frequency C.F. म्हणा.
४. वारंवारितेच्या बेरजेला x म्हणा
५. खालील सुत्राचा अवलंब करा.
   m=The size of $(\frac{n+1}{2})$th item
   याठिकाणी n म्हणजे no. of items (Total of frequency) होय.
६. वरील सुत्राच्या सहाय्याने आलेले मूल्य कोणत्या संचयी वारंवारितेमध्ये अंतर्भूत आहे ते पहा.
७. त्या C.F. चे जे Measurement आहे ते म्हणजे मध्यका Median होय.

उदा. Calculate the Median from the following data.

Size	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
frequency	3	5	6	11	18	20	13	7	6	4

Size	f	C.f.
5	3	3
6	5	8

7	6	14
8	11	25
9	18	43
10	20	63
11	13	76
12	7	83
13	6	89
14	4	93
	n=93	

Calculation of Median

M=size of $(\frac{n+1}{2})$th items.

= Size of $(\frac{93+1}{2})$th item

= size of $(\frac{94}{2})$th item.

= size of 47th item.

Lies in c.f 63 whose Corresponding value is 10

: Median = 9

अखंडीत पदमालेत मध्यका (Median) काढणे.

अखंडीत पदमालेत मध्यका (median) शोधून काढण्याकरिता खालील पध्दतीचा अवलंब करावा.

१. दिलेले गट चढत्या क्रमाने लिहून घ्या.
२. प्रत्येक गटासमोर त्याची वारंवारिता (frequency) लिहा.
३. या वारंवारितेची बेरीज करा. त्याला n म्हणा.
४. प्रत्येक गटाची संचीत वारंवारिता Cumulative Frequency काढा.
५. खालील सुत्राचा अवलंब करून Median group शोधून काढा.
   जर वारंवारितेची बेरीज समसंख्या असेल तर मध्यका
   Median M= size of (n/2)th item. सुत्राचा अवलंब करा.
   जर वारंवारितेची बेरीज विषम संख्या असेल तर मध्यका Median M= size of (n+1/2)th item. सुत्राचा अवलंब करा.
६. वरील सुत्राद्वारे आलेली संख्या कोणत्या संखयी वारंवारितेमध्ये (C.F.) अंतर्भूत आहे ते पहा व त्याचा गट शोधा.
७. आलेला गट हा मध्यका (Median) गट होय.
८. या गटातील प्रत्यक्ष मध्यका काढण्यासाठी खालील सूत्राचा अवलंब करा.

$$M = \frac{L1+L2-L1}{f1(m-c)}$$

M = मध्यका (Median)
L1 = मध्यका गटाची निम्मतम मर्यादा Lower limit of the Median group
L2 = मध्यका गटाची उच्चतम मर्यादा Upper limit of the Median group
f1 = मध्यका गटाची वारंवारिता frequency of Median group.
m = (n+1/2) किंवा (n/2) सुत्राचा अवलंब करून निघालेले मूल्य
Value Calculated by above formula.
C = मध्यका गटाच्या अगोदरच्या गटाची संचयी वारंवारिता C.F. of the previous froup of the Median group.
OR.
Ex. Calculate the Median from following data.

Size	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
Frequency	3	5	6	13	7	6	4

Size	Frequency	C.f
10-20	3	3
20-30	5	8
30-40	6	14
40-50	13	27
50-60	7	34
60-70	6	40

70-80	4	44
	n=44	

Calculation of Median.

Median = size of $(\frac{n}{2})$th item.

= size of $(\frac{44}{2})$th item.

= size of 22th item.

The value 22 lies in c.f. 27 of which the group is 40-50 so Mediam group is 40-50.

Applying the formula.

$$M = \frac{L1+L2-L1}{f1(m-c)}$$

$$= \frac{40+50-40}{13(22-14)}$$

$$= \frac{40+10}{13*8}$$

$$= \frac{40+80}{13}$$

Median = 40 + 6.15

= 46.15

भूयिष्टक (Mode)

भूयिष्टक ह्याचेच दुसरे नाव बहुलक होय. भूयिष्टकासाठी (z) या सांकेतिक चिन्हाचा उपयोग केला जातो. पदमालेत जे पद वारंवार येते अशा पदाला भूयिष्टक म्हणतात.

१. वैयक्तिक पदमालेत भूयिष्टक काढणे. (Individua; Series)

वैयक्तिक पदमालेत केवळ अवलोकनाने भूयिष्टक काढता येते त्यासाठी खालील प्रमाणे पध्दतीचा अवलंब करावा.

१. दिलेली पदमाला चढत्या क्रमाने (Ascending order) लिहून घ्यावी.

२. पदमालेत ज्या पदाची वारंवारिता सर्वात जास्त असेल ते पद म्हणजे Mode भूयिष्टक होय.

z=Most repeated item.

ज्यावेळी भूयिष्टक (Mode) स्पष्ट नसेल त्या वेळेस भूयिष्टक (Mode) काढण्यासाठी समांतर माध्य (Mean) व मध्यका चा उपयोग करून भूयिष्टक काढतात. त्यासाठी खालील सुत्राचा अवलंब करतात.

Z=3M-2a

Z = भूयिष्टक

M = मध्यका

a = माध्य

वैयक्तिक पदमोलत भूयिष्टक काढणे.

Find out the mode from the following data.

Measurement – 5,6,9,5,7,9,9,7,9,10,11,12

Solution – Calculation of mode

Measurement (m)

(Arranged) 5 5 6 7 7 9 9 9 9 10 11 12

Z = Most repeated

+ item

= 9 (repeats 4 itemes)

By observation method we find that the mode is 9 it repeats maximum times.

२.खंडीत पदमालेत भूयिष्टक काढणे - (Discrete Series) खंडीत पदमालेत भूयिष्टक काढण्यासाठी दोन पध्दतीचा अवलंब करता येतो.

अ. अवलोन किंवा निरीक्षण पध्दती (Observation Method) पदमालेमध्ये ज्या पदाची वारंवारिता सर्वात जास्त असेल त्या पदमुल्याला भूयिष्टक म्हटले जाते.

ब. गटरचना व विश्लेषण पध्दती (Grouping and Analysis Method) :- या पध्दतीने भूयिष्टक शोधून काढण्याकरिता खालील कृतीचा अवलंब करावा

१. एकुण ७ रकान्यात गणन तक्ता तयार करावा.
२. पहिल्या रक्यानामध्ये दिलेले पदमुल्य (size) चढत्या क्रमाने (Scending order) लिहून घ्या.
३. उरलेल्या सहा रकान्यांना वारंवारिता (frequency) हे नाव देऊन त्यांना १ ते ६ क्रमांक द्या.
४. वारंवारितेच्या पहिल्या रकान्यामध्ये त्या त्या पदाची दिलेली वारंवारिता त्या पदापुढे लिहून घ्या.
५. वारंवारिता दुसऱ्या रकान्यामध्ये वारंवारितेच्या दोन दोन आकड्यांची बेरीज करून ती लिहा.
६. वारंवारितेच्या तिसऱ्या रकान्यामध्ये वारंवारितेचा पहिला अंक सोडून वारंवारितेच्या दोन दोन आकड्यांची बेरीज करा व लिहा.
७. वारंवारितेच्या चौथ्या रकान्यामध्ये सुरूवातीपासून तीन तीन वारंवारितेच्या आकड्याची बेरीज करा. व लिहा.
८. वारंवारितेच्या पाचव्या रकान्यामध्ये पहिल्या वारंववारितेचा अंक सोडून वारंवारितेच्या तीन तीन आकड्यांची बेरीज करा. व लिहा.
९. वारंवारितेच्या सहाव्या रकान्यामध्ये वारंवारितेचे पहिले दोन अंक सोडून वारंवारितेच्या तीन तीन आकड्यांची बेरीज करा व लिहा.
१०. वारंवारितेच्या सहाही रकान्यामधील सर्वात मोठा वारंवारितेचा आकडा शोधून अधोरेखांकित करा.
११. भूयिष्टक शोधून काढण्यासाठी खालील प्रमाणे आठ रकान्याची विश्लेषण तक्ता (Analysis Table) तयार करा. प्रत्येक रकान्यातील सर्वात तक्यात वारंवारितेचे पदमुल्याच्या समोर विश्लेषण तक्त्यात बरोबरची खूण करा. खूणांची बेरीज करा. ज्या पदमुल्या समोरील बरोबरच्या खूणांची बेरीज सर्वात जास्त असेल ते पदमुल्य (size) भूयिष्टक होय.

Size	1	2	3	4	5	6	Total

Illustration

Find out mode of monthly income of labour from following data.

Income in Rs.	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500	6000
No of Labour	8	10	15	21	30	28	20	13	7

Solution – Calculation of model Income of laboure

Income in Rs.	Frequency					
	1	2	3	4	5	6
2000	8	18				
2500	10		25	33		
3000	15	36			46	
3500	21		51			66
4000	30	58		79		
4500	28		48		78	
5000	20	33				61
5500	13		20	40		
6000	7					

Analysis Table

Income in Rs	1	2	3	4	5	6	Total
2000							
2500							
3000							
3500							
4000							
4500							
5000							
5500							
6000							

Applying the following formula.
Z= Most repeated item.
= 2800. (repeats 5 times.)

३.अखंडीत पदमालेत (Continuous Series) भूयिष्टक काढणे. अखंडीत पदमालेत भूयिष्टक काढण्यासाठी खालील पध्दतीचा अवलंब करावा.

१. गट रचना व विश्लेषण तत्क्याच्या सहाय्याने भूयिष्टकाचा गट शोधावा. त्यासाठी खंडीत पदमालेत ज्या पध्दतीने ज्या कृतीचा अवलंब केला त्याच कृतीचा अवलंब करावा.

२. प्रत्यक्षात भूयिष्टक (Mode) ची किंमत काढण्याकरिता खालील सुत्राचा अवलंब करावा

सुत्र

$$z = L1 + \frac{f1 - f0}{2f1 - f0 - f2}(L2 - L1)$$

जेथे z= भूयिष्टक

L1 = भूयिष्टक गटाची निम्नतम सीमा

Lower limit of Model group

L2 = भूयिष्टक गटाची उच्चतम मर्यादा

Upper limit of the model group

f0 = भूयिष्टक गटाच्या आधीच्या गटाची वारंवारिता

frequency of the previous group of the model group

f1 = भूयिष्टक गटाची वारंवारिता

frequency of the Model group

f2 = भूयिष्टक गटाच्या नंतरच्या गटाची वारंवारिता

frequency of the next group of the Model group.

दिलेल्या पदमालेतून जर भूयिष्टक निघत नसेल तर मात्र भूयिष्टक काढण्यासाठी खालील सुत्राचा अवलंब करावा.

Z= 3M-2a

Z= भूयिष्टक

M= मध्यका

a= समांतर माध्य

Illustration :- The following show the monthely income of labour of a factory find.

The Mode

Monthly Income group	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000	4000-4500	4500-5000
No of. Laboure	12	28	8	19	32	23	21	9

Solution :- Calculation of Mode

Monthly Income group	Frequency					
	1	2	3	4	5	6
1000-1500	12	40				
1500-2000	28		36		55	
2000-2500	8	24		48		59
2500-3000	19		51			
3000-3500	32	55		74		
3500-4000	23		44		76	
4000-4500	21	30				53
4500-5000	9					

Analysis Table

Monthly Income	1	2	3	4	5	6	Total
1000-1500							
1500-2000							
2000-2500							1
2500-3000							3
3000-3500							6
3500-4000							3

4000-4500 4500-5000							1

Model group is 3000-3500.

Applying the following formula.

$$z = L1 + \frac{f1 - f0}{zf1 - f0 - f2}(l2 - L1)$$

$$z = 3000 + \frac{32 - 19}{2 * 32 - 19 - 23}(3500 - 3000)$$

$$z = 3000 + \frac{13}{64 - 19 - 23}(500)$$

$$= 3000 + \frac{13}{12}(500)$$

$$= 3000 + \frac{6500}{22}$$

= 3000+295.45

Mode = 3295.45

गुणोत्तर माध्य किंवा भूमितीय माध्य (Geometric Mean)

जेव्हा पदमालेमध्ये मोठ्या मोठ्या संख्या दिलेल्या असतात. व त्याची गणना करणे अवघड होते तेव्हा गुणोत्तर माध्य काढतात. गुणोत्तर माध्य काढण्यासाठी log चा उपयोग करतात.

वैयक्तिक पदमालेत गुणोत्तर माध्य काढणे. वैयक्तिक पदमालेत गुणोत्तर माध्य काढण्यासाठी खालील सुत्राचा अवलंब करतात.

$$G.M. = Antilog + \frac{\mathrm{E\ log}}{n}$$

जेथे G.M. = गुणोत्तर माध्य

E log = सर्व पदांचा काढल्यानंतर त्याची बेरीज

n = पद संख्या

Ilustration – Calculate G.M. og the following.

Series – 317,255, 8, 5265, 97, 3261, 18, 798, 44, 1997

Solution.

Size	Log
317	2.5011
255	2.4065
8	0.9031
5265	3.7214
97	1.9868
3261	3.5133
18	1.2553
798	2.9020
44	1.6435
1997	3.3005
n=10	Σlog = 24.1335

Applying the following formula

$$G.M. = Antilog + \frac{\Sigma \log}{n}$$

$$G.M. = Antilog + \frac{24.1335}{10}$$

= Antilig 2.4134

259.0

G.M = 259

खंडीत व अखंडीत गुणोत्तर माध्य काढणे.

खंडीत व अखंडीत पदमालेत गुणोत्तर माध्य काढण्यासाठी खालील सुत्राचा अवलंब करतात.

$$G.M. = Antilog + \frac{\Sigma \log. f.}{n}$$

जेथे G.M. = गुणोत्तर माध्य

Log f = log * f वारंवारिता

Elog = log व वारंवारितेचा गुणाकार केल्यानंतर सर्व पदांची बेरीज

n= एकुण पदसंख्या total of Frequency.

खंडीत पदमालेत गुणोत्तर माध्य काढा.

Illuttration calculate Geometric Mean of Age of the following Series.

Age	8	12	15	20	25	30	32	38	34	40
No of Persons (f)	3	5	9	12	14	16	13	11	9	8

Solution – Calculation of Geometric Mean of Age

Age	Log	No of Persons f.	Log f.*f
8	0.9031	3	2.7093
12	1.0792	5	5.396
15	101761	9	10.5849
20	1.3010	12	15.612
25	1.3979	14	195706
30	1.4771	16	23.6336
32	1.5051	13	19.5663
38	1.5798	11	17.3778

39 40	1.5911 1.6021	9 8	14.3199 12.9168
		n= 100	Σlog = 141.5872

$$G.M. = Antilog + \frac{\mathrm{log.f.}}{n}$$

$$= Antilog + \frac{141.5872}{100}$$

= Antilog 1.4158

= 26.05

Gemetric Mean = 26.05

Find the geometric Mean of following series

Size	0-5	5-2	10-15	15-20	20-25	25-30
Frequency	9	12	16	21	18	14

Solution – Calculation of G.M.

Size	M.V.	Log	Frequency	Log*f.
0-5 5-10 10-15 15-20 20-25 25-30	2.5 7.5 12.5 17.5 22.5 27.5	0.3979 0.8751 1.0969 1.2430 1.3522 1.4393	9 12 16 21 18 14	3.5811 10.5012 17.5504 26.103 24.3396 20.1502
				Σlog = 102.2255

$$G.M. = Antilog + \frac{\sum \mathrm{Log.f}}{n}$$

$$= Antilog + \frac{102.2255}{90}$$

$$Antilog\ 1.1358$$

$$G.M. = 13.68$$

हरात्मक माध्य (Harmonic Mean) H.M.

१. वैयक्तिक पदमालेत हरात्मक माध्य काढणे. हरात्मक माध्य काढण्यासाठी खालील पध्दतीचा अवलंब करतात.
   १. दिलेली पदमाला लिहून घ्यावी.
   २. प्रत्येक पदाचा व्यत्क्रम काढावा. व्युत्क्रम काढण्यासाठी एकल पदमुल्याने भाग दयावा.
   ३. खालील सुत्राचा अवलंब करावा.

$$H.M = \frac{n}{(\frac{1}{m1} + \frac{1}{m2} + \frac{1}{m3} \ldots\ldots \frac{1}{m4})}$$

m म्हणजे पदमुल्या

n म्हणजे एकुण पदसंख्या किंवा वारंवारिता किंवा दुसऱ्या सूत्राचा अवलंब करता येतो.

$$\text{H.M.} = \text{Reciprocal } \left(\frac{\sum Reciprocal}{N}\right)$$

२. खंडीत किंवा अखंडीत पदमालेत हरात्मक माध्य काढणे.

१. दिलेली पदमाला लिहून घ्यावी

२. पदमालेतील पदमुल्यांचे व्युत्क्रम (Reciprocal) काढावित अखंडित पदमालेत गटाचे मध्य मुल्य काढून त्याचे व्युत्क्रम काढावेत.

३. पुढच्या रकान्यात वारंवारिता लिहून घ्यावी.

४. वारंवारितेची बेरीज करून घ्यावी. त्याला हे नांव द्यावे.

५. वारंवारिता व व्युत्क्रम ह्यांचा गुणाकार करावा (Reciprocal * f.) ह्या सर्व पदांची बेरीज करावी. त्याला $\sum Reciprocalf.$ असे म्हणावे.

खालील सुत्रात किंमती टाकाव्या.

$$\text{H.M.} = \text{Reciprocal of } \left(\frac{\sum Reciprocal * f.}{N}\right)$$

वैयक्तिक पदमालेत हरात्मक माध्य काढा.

उदा. Calculate Harmonic Mean From following Series

S. No	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M	3	7	5	10	15	18	24	13	8	6

Solution

Sr. No.	m	Reciprocal
1	3	.3333
2	7	.1429
3	5	.2000
4	10	.1000
5	15	0.0667
6	18	0.0556
7	24	0.0417
8	13	0.0769
9	8	.1250
10	6	.1667
	n=10	E Rec. = 1.3988

$$\text{H.M.} = \text{Reciprocal } \left(\frac{\sum Reciprocal}{N}\right)$$

$$= \text{Reciprocal } \left(\frac{1.3988}{10}\right)$$

= Rec. 0.13988

H.M. = 7.1489

खंडीत पदमालेत हरात्मक माध्य काढणे.

In the following series weigh of 150 person is given Calculate Harmonic Mean of Weigh of the person.

50

Weight in kg.	50	52	56	58	65	70	72	85	88
No of Person	29	21	32	25	16	11	8	6	2

Solution Calculation of Harmonic Mean of Weigh.

Weight in Kgs.	Reciprocal	No. of Person	Reciprocal*f
50	0.02	29	0.58
52	0.0192	21	0.4032
56	0.0178	32	0.5696
58	0.0172	25	0.43
65	0.0154	16	0.2464
70	0.0143	11	0.1573
72	0.0139	8	0.112
85	0.0118	6	0.0708
88	0.0114	2	0.0227
		N=150	ERec*f = 2.592

$$\text{H.M.} = \text{Reciprocal of } \left(\frac{\sum Reciprocal.f}{N}\right)$$

$$\text{Reciprocal of } \left(\frac{2.592}{150}\right)$$

= Rec 0.01728

H.M. = 57.8704

अखंडीत पदमालेत हरात्मक माध्य काढणे.

Illustration – Find out the Harmonic Mean of Marks from. Group of 100 Students.

Marks	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
Students	32	25	16	11	8	6	2

Marks	M.V.	Reciprocal	Frequency	Reci.f.
30-40	35	0.0285	32	0.912
40-50	45	0.0222	25	0.555
50-60	55	0.0181	16	0.2896
60-70	65	0.0154	11	0.1694
70-80	75	0.0133	8	0.1064
80-90	85	0.0118	6	0.0708
90-100	95	0.0105	2	0.0211
			n=100	EReci.f. 2.1243

Harmonic Mean = $\text{Reciprocal } \left(\frac{\sum Reciprocal.f}{N}\right)$

= $\text{Reciprocal } \left(\frac{2.1243}{100}\right)$

= Reciprocal 0.021243

H.M. = 47.07